第38講　数列(3)

例題38－1

初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$S_n=n^2-3n$　　(2)　$S_n=3^n+1$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 38 ー 1

初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$S_n=3n^2-2n+1$　　　(2)　$S_n=2^{n+2}-4$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 38 － 2

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n-2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ．

(2)　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

(ア)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+4$　　　(イ)　$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 38 − 2

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ．

(2)　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

(ア)　$a_1=4$，$a_{n+1}=a_n-3$　　　(イ)　$a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 38 − 3

次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+n$

(2)　$a_1=6$，$a_{n+1}=4a_n-9$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 38 ー 3

次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+4^n$

(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 38 － 4

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2a_n-n$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　a_{n+1} を a_n を用いて表せ．　　(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 38 ー 4

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=-2a_n+n$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ.

(1)　a_{n+1} を a_n を用いて表せ.　　(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第38講　数列(3)

(1)　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2+5n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=$ [ア] $n+$ [イ] である.

(2)　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

(i)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3$　　$a_n=$ [ウ] $n-$ [エ]

(ii)　$a_1=3,\ a_{n+1}=3a_n$　　$a_n=$ [オ]^n

(iii)　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+2^n+n$　　$a_n=$ [カ]$^n+\dfrac{1}{[キ]}n^2-\dfrac{1}{[ク]}n$

(iv)　$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-2$　　$a_n=$ [ケ]$^{n-1}+$ [コ]

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 38 講　数列(3)

例題 38 − 1

初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$S_n=n^2-3n$　　(2)　$S_n=3^n+1$

(1)　$a_1=S_1=1^2-3\cdot1=-2$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-3n)-\{(n-1)^2-3(n-1)\}$$
$$=n^2-3n-(n^2-2n+1-3n+3)=2n-4\quad\cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$2\cdot1-4=-2=a_1$　より，①は $n=1$ のときも成り立つ．

したがって　$\boldsymbol{a_n=2n-4}$

(2)　$a_1=S_1=3^1+1=4$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n+1-(3^{n-1}+1)=3\cdot3^{n-1}-1\cdot3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}\quad\cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$2\cdot3^0=2$　　よって　①は $n=1$ のときには成り立たない．

よって　$\boldsymbol{a_1=4}$，**$\boldsymbol{n\geqq2}$ のとき**　$\boldsymbol{a_n=2\cdot3^{n-1}}$

類題 38 − 1

初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$S_n=3n^2-2n+1$　　(2)　$S_n=2^{n+2}-4$

(1)　$a_1=S_1=3\cdot1^2-2\cdot1+1=2$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2-2n+1)-\{3(n-1)^2-2(n-1)+1\}$$
$$=3n^2-2n+1-(3n^2-6n+3-2n+2+1)=6n-5\quad\cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$6\cdot1-5=1$　　よって　①は $n=1$ のときには成り立たない．

よって　$\boldsymbol{a_1=2}$，**$\boldsymbol{n\geqq2}$ のとき**　$\boldsymbol{a_n=6n-5}$

(2)　$a_1=S_1=2^3-4=4$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+2}-4)-(2^{n+1}-4)=2\cdot2^{n+1}-1\cdot2^{n+1}=2^{n+1}\quad\cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$2^2=4$　より，①は $n=1$ のときも成り立つ．

よって　$\boldsymbol{a_n=2^{n+1}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題38－2

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n-2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ．

(2)　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

(ア)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+4$　　(イ)　$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n$

(1)　$a_2=4a_1-2=4\cdot1-2=\mathbf{2}$　　$a_3=4a_2-2=4\cdot2-2=\mathbf{6}$

$a_4=4a_3-2=4\cdot6-2=\mathbf{22}$　　$a_5=4a_4-2=4\cdot22-2=\mathbf{86}$

(2)　(ア)　$a_{n+1}=a_n+4$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=2$，公差4の等差数列

よって　$a_n=2+(n-1)\cdot4=\boldsymbol{4n-2}$

(イ)　$a_{n+1}=3a_n$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=5$，公比3の等比数列

よって　$a_n=\mathbf{5\cdot3^{n-1}}$

類題38－2

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ．

(2)　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

(ア)　$a_1=4$，$a_{n+1}=a_n-3$　　(イ)　$a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$

(1)　$a_2=2a_1+1=2\cdot2+1=\mathbf{5}$　　$a_3=2a_2+2=2\cdot5+2=\mathbf{12}$

$a_4=2a_3+3=2\cdot12+3=\mathbf{27}$　　$a_5=2a_4+4=2\cdot27+4=\mathbf{58}$

(2)　(ア)　$a_{n+1}=a_n-3$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=4$，公差 -3 の等差数列

よって　$a_n=4+(n-1)\cdot(-3)=\boldsymbol{-3n+7}$

(イ)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列

よって　$a_n=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 38 − 3

次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+n$

(2)　$a_1=6,\ a_{n+1}=4a_n-9$

(1)　$a_{n+1}-a_n=n$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_n=n$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}k=1+\frac{1}{2}(n-1)n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1$　……①

①で $n=1$ のとき　$\frac{1}{2}\cdot1^2-\frac{1}{2}\cdot1+1=1$ より，①は $n=1$ のときも成り立つ.

よって　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1}$

(2)　$a_{n+1}=4a_n-9$　より　$a_{n+1}-3=4(a_n-3)$，$a_1-3=6-3=3$

よって数列 $\{a_n-3\}$ は初項 3，公比 4 の等比数列であるから

$a_n-3=3\cdot4^{n-1}$　　したがって　$\boldsymbol{a_n=3\cdot4^{n-1}+3}$

類題 38 − 3

次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

(1)　$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+4^n$

(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+4$

(1)　$a_{n+1}-a_n=4^n$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_n=4^n$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=3+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}=\frac{4^n+5}{3}$　……①

①で $n=1$ のとき　$\frac{4+5}{3}=3$ より，①は $n=1$ のときも成り立つ.

よって　$\boldsymbol{a_n=\frac{4^n+5}{3}}$

(2)　$a_{n+1}=3a_n+4$　より　$a_{n+1}+2=3(a_n+2)$，$a_1+2=1+2=3$

よって数列 $\{a_n+2\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列であるから

$a_n+2=3\cdot3^{n-1}=3^n$　　したがって　$\boldsymbol{a_n=3^n-2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 38 ー 4

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2a_n-n$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　a_{n+1} を a_n を用いて表せ．　　(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$S_n=2a_n-n$　……①　より　$S_{n+1}=2a_{n+1}-(n+1)$　……②

②−①より　$S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}-2a_n-1$

つまり　$a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n-1$　　　よって　$\boldsymbol{a_{n+1}=2a_n+1}$

(2)　①で $n=1$ のとき　$S_1=2a_1-1$　つまり　$a_1=2a_1-1$　　よって　$a_1=1$

$a_{n+1}=2a_n+1$　より　$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，$a_1+1=2$

よって数列 $\{a_n+1\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列より

$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$　　　したがって　$\boldsymbol{a_n=2^n-1}$

類題 38 ー 4

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=-2a_n+n$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　a_{n+1} を a_n を用いて表せ．　　(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$S_n=-2a_n+n$　……①　より　$S_{n+1}=-2a_{n+1}+n+1$　……②

②−①より　$S_{n+1}-S_n=-2a_{n+1}+2a_n+1$

つまり　$a_{n+1}=-2a_{n+1}+2a_n+1$

$3a_{n+1}=2a_n+1$　　　よって　$\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}}$

(2)　①で $n=1$ のとき　$S_1=-2a_1+1$　つまり　$a_1=-2a_1+1$　　よって　$a_1=\frac{1}{3}$

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$　より　$a_{n+1}-1=\frac{2}{3}(a_n-1)$，$a_1-1=-\frac{2}{3}$

よって数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $-\frac{2}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列より

$a_n-1=-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=-\left(\frac{2}{3}\right)^n$　　　したがって　$\boldsymbol{a_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 38 講　数列(3)

(1)　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2+5n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=$ ア $n+$ イ　である.

(2)　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

(i)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3$　　$a_n=$ ウ $n-$ エ

(ii)　$a_1=3,\ a_{n+1}=3a_n$　　$a_n=$ オ ^{n}

(iii)　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+2^n+n$　　$a_n=$ カ $^n+\dfrac{1}{\text{キ}}n^2-\dfrac{1}{\text{ク}}n$

(iv)　$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-2$　　$a_n=$ ケ $^{n-1}+$ コ

解答例

(1)　$a_1=S_1=2\cdot1^2+5\cdot1=7$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2+5n)-\{2(n-1)^2+5(n-1)\}$

$=2n^2+5n-(2n^2-4n+2+5n-5)=4n+3$　……①

①で $n=1$ のとき　$4\cdot1+3=7$　より，①は $n=1$ のときも成り立つ.

よって　$a_n=\mathbf{4n+3}$

(2)　(i)　初項 1，公差 3 の等差数列より　$a_n=1+(n-1)\cdot3=\mathbf{3n-2}$

(ii)　初項 3，公比 3 の等比数列より　$a_n=3\cdot3^{n-1}=\mathbf{3^n}$

(iii)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=2^n+n$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k+k)$$

$$=2+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}+\frac{1}{2}(n-1)n=2^n+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\quad\cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$2^1+\dfrac{1}{2}\cdot1^2-\dfrac{1}{2}\cdot1=2$ より，①は $n=1$ のときも成り立つ.

よって　$a_n=\mathbf{2^n+\dfrac{1}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n}$

(iv)　$a_{n+1}=3a_n-2$　より　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$，$a_1-1=2-1=1$

よって数列 $\{a_n-1\}$ は初項 1，公比 3 の等比数列であるから

$a_n-1=1\cdot3^{n-1}=3^{n-1}$　　したがって　$a_n=\mathbf{3^{n-1}+1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。